



Численное моделирование грунтовых сред



Ольга ГОЛОСОВА
Olga A. GOLOSOVA

Иван НЕСТЕРОВ
Ivan V. NESTEROV



Разработана численная реализация варианта метода конечных элементов для определения перемещений и напряжений в массиве грунта. Программный комплекс построен на базе математического аппарата преобразования Фурье финитных функций.

Ключевые слова: транспорт, напряженно-деформированное состояние области, прямоугольный элемент, изображения Фурье финитных функций, программный комплекс.

Голосова Ольга Андреевна — старший преподаватель кафедры «Подземные сооружения» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

Нестеров Иван Владимирович — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования транспортных конструкций и сооружений» МИИТ.

Разработка и использование математического моделирования с целью прогноза поведения массива горных пород на современном этапе развития инженерной геодинамики становятся все более активными.

Связанные с этим задачи вполне реальны, ибо нарушение прочности и устойчивости грунтовой толщи, а также ее деформация возникают как следствие воздействия на нее различных сил, которые можно выразить через вес возводящегося на ней сооружения, через проявления таких природных процессов, как сейсмические явления и тому подобное.

В данной статье представлена численная реализация варианта метода конечных элементов. Цель — проследить перемещения и зафиксировать напряжения в массиве грунта. Программный комплекс строится с помощью математического аппарата преобразования Фурье.

Метод решения задач, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций, был предложен в статье профессора Е. Н. Курбацкого [1]. Суть здесь в том, что функции, описывающие напряженно-деформированное состояние

конечной части бесконечной области или тела ограниченных размеров, представляются финитными, то есть функциями, равными нулю вне области, занимаемой телом. В основу метода положена теорема Винера-Пели-Шварца, утверждающая, что изображения Фурье финитных функций являются целыми функциями. Это свойство используется для построения плоского прямоугольного упругого элемента (рис. 1), у которого границы параллельны координатным осям (все характеристики упругой среды при этом считаются постоянными). Неизвестными будут интегралы от перемещений и напряжений по сторонам элемента.

Цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены стороны прямоугольника. Для каждой из сторон необходимо найти четыре граничные функции U , V , σ , τ (соответственно горизонтальные и вертикальные перемещения, нормальные и касательные напряжения).

Внешнее воздействие на границе прямоугольника представлено массовой нагрузкой, которая может быть задана посредством перемещений, напряжений или в виде соотношений между ними. Для установления зависимости между значениями изображений Фурье функций на границе тела и действующей на него нагрузкой используется теорема о граничных функциях [1].

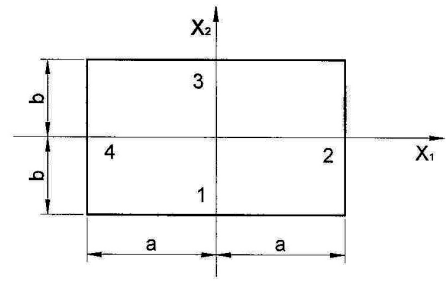


Рис. 1. Прямоугольный плоский элемент.

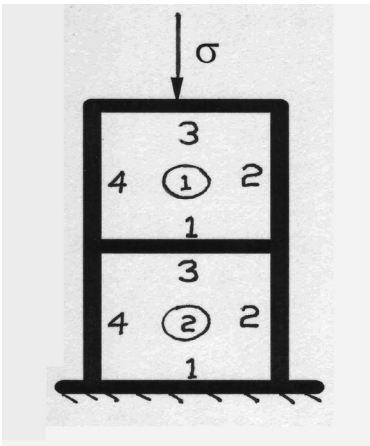


Рис. 2. Расчетная схема.

| Неизвестные | σ_1 | τ_1 | U_2 | V_2 | U_3 | V_3 | σ_3 | τ_3 | U_4 | V_4 | U_2 | V_2 | U_3 | V_3 | U_4 | V_4 |
|-------------|------------|----------|-------|-------|-------|-------|------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Элемент №1 | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Элемент №2 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | | | | | |

Рис. 3. Матрица коэффициентов.



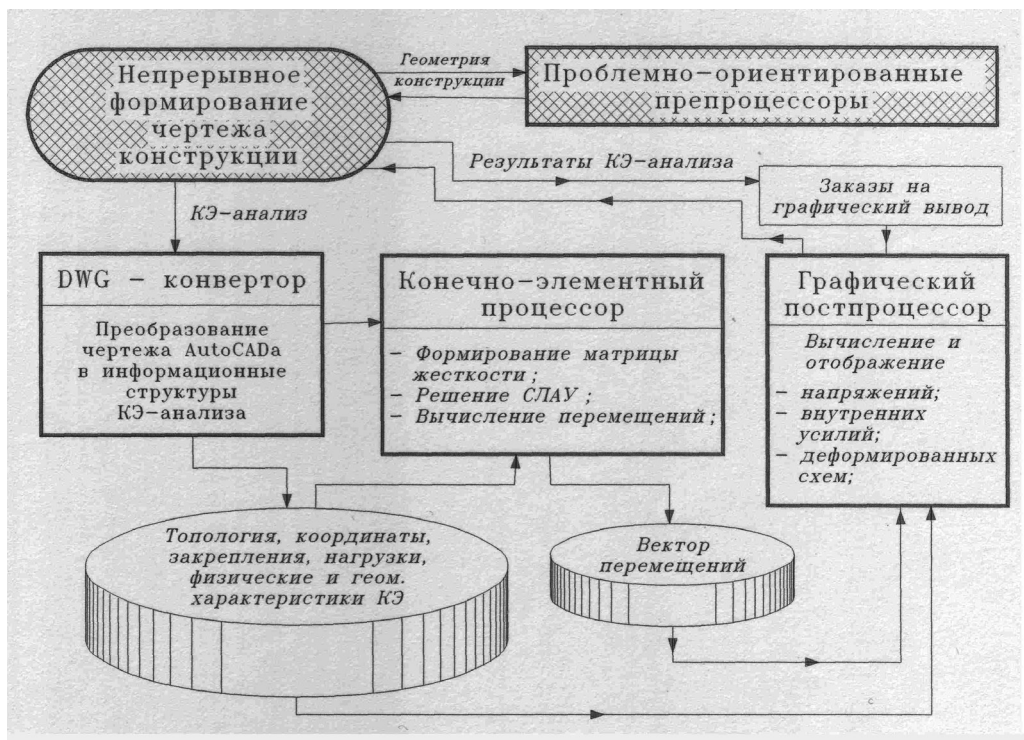
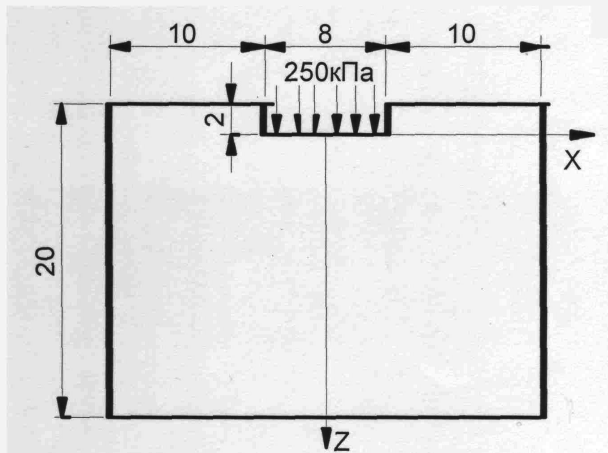


Рис. 4. Архитектура комплекса «DIRAK».

Рис. 5. Схема действия равномерно распределенной нагрузки.



Прямоугольный элемент описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 & а) [\tilde{U}_1 + \tilde{U}_3] / 2 - [\tilde{U}_4 + \tilde{U}_2] / 2 = 0 \\
 & б) [\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_3] / 2 + \mu([\tilde{U}_1 - \tilde{U}_3] / 2b + [\tilde{V}_4 - \tilde{V}_2] / 2a) = 0 \\
 & в) 4ab\rho\omega^2[\tilde{U}_4 + \tilde{U}_2] / 2 - 2b[\tilde{\sigma}_4 - \tilde{\sigma}_2] - 2a[\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_3] = 0 \\
 & г) [\tilde{\sigma}_4 + \tilde{\sigma}_2] / 2 + (\lambda + 2\mu)[\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2] / 2a + \lambda[\tilde{V}_1 - \tilde{V}_3] / 2b = 0 \\
 & д) 4ab\rho\omega^2[\tilde{V}_1 + \tilde{V}_3] / 2 - 2a[\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_3] - 2b[\tilde{\tau}_4 - \tilde{\tau}_2] = 0 \\
 & е) [\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_3] / 2 + \lambda[\tilde{U}_4 - \tilde{U}_2] / 2a + (\lambda + 2\mu)[\tilde{V}_1 - \tilde{V}_3] / 2b = 0 \\
 & ж) [\tilde{V}_4 + \tilde{V}_2] / 2 - [\tilde{V}_1 + \tilde{V}_3] / 2 = 0 \\
 & з) [\tilde{\tau}_4 + \tilde{\tau}_2] / 2 - [\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_3] / 2 = 0
 \end{aligned} \quad (1)$$

где λ и μ — параметры Лямэ; a и b — длины сторон прямоугольника; ρ — плотность исследуемой области; ω — круговая частота.

Уравнения (1) имеют следующий физический смысл:

- «а» и «ж» — уравнения совместности;
- «в» и «д» — уравнения движения центра масс элемента;
- «б», «г» и «е» — закон Гука;
- «з» — закон парности касательных напряжений.

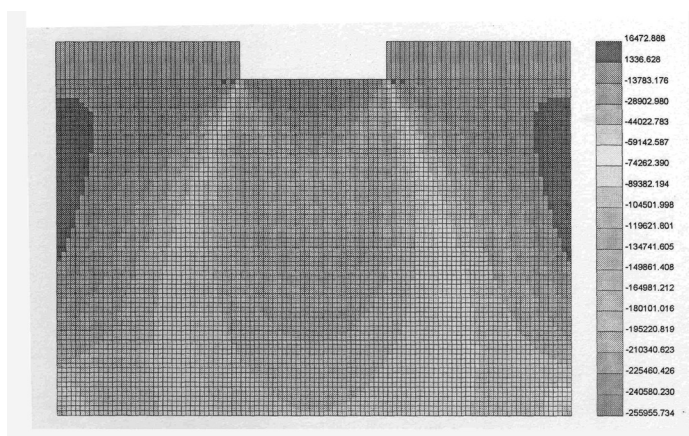


Рис. 6. Вертикальные напряжения σ_z .

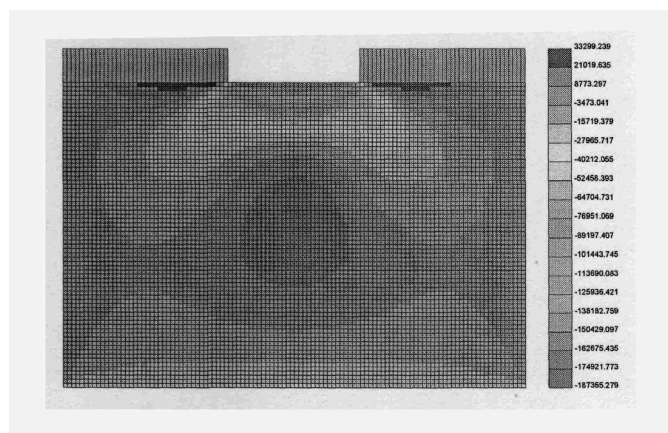


Рис. 7. Горизонтальные напряжения σ_x .

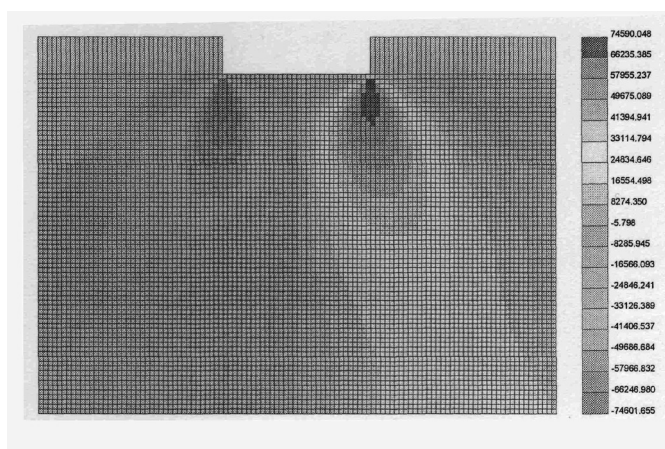


Рис. 8. Касательные напряжения τ_{xz} .

Напряженно-деформированное состояние исследуемой области определяется в результате решения системы матриц: для каждого элемента области уравнения (1) записываются в виде матриц, которые затем объединяются по сторонам элементов.

В качестве примера использования приведенного метода рассмотрим по-

строение системы матриц для исследуемой области, которую разделим на два прямоугольных плоских элемента (рис. 1). Внешнее воздействие задается в виде нормального напряжения σ (рис. 2).

Для расчетной схемы (рис. 2) матрица коэффициентов будет иметь размер 16×16



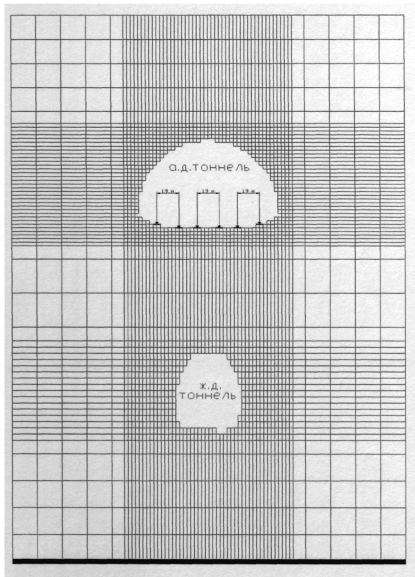


Рис. 9. Расчетная схема: три полосы движения (нагрузка АК).

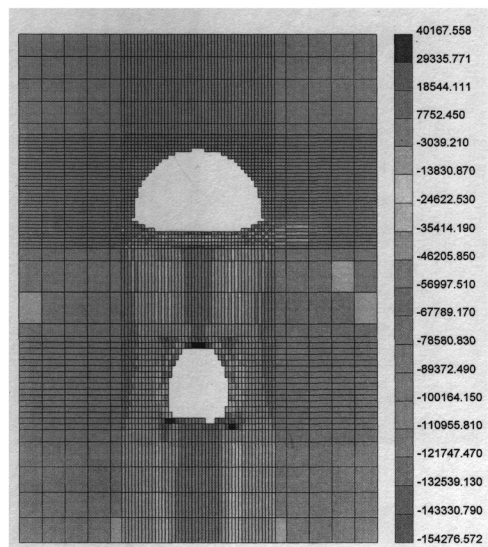


Рис. 10. Горизонтальные напряжения σ_x : обделка железнодорожного тоннеля: $\max \sigma_x = 100 \text{ кН/м}^2$ (на своде слева и справа); обделка автодорожного тоннеля: $\max \sigma_x = -154 \text{ кН/м}^2$ (по подошве в центре).

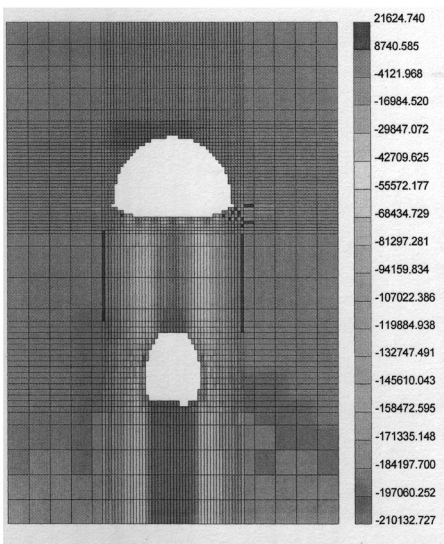


Рис. 11. Вертикальные напряжения σ_z : обделка железнодорожного тоннеля: $\max \sigma_z = -210 \text{ кН/м}^2$ (на своде слева и справа); обделка автодорожного тоннеля: $\max \sigma_z = -81 \text{ кН/м}^2$ (по подошве).

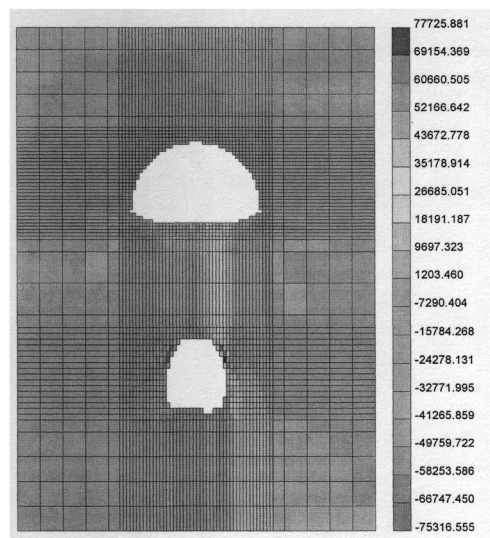


Рис. 12. Касательные напряжения τ_{xz} : обделка железнодорожного тоннеля: $\max \tau_{xz} = 78 \text{ кН/м}^2$ (на своде справа); обделка автодорожного тоннеля: $\max \tau_{xz} = 44 \text{ кН/м}^2$ (по подошве).

(рис. 3). Предполагается, что перемещения и напряжения на смежных сторонах прямоугольных элементов одинаковы. На рис. 3 выделены области, в которых записываются коэффициенты для неизвестных перемещений и напряжений на соответствующих сторонах прямоугольных элементов.

На основе изложенной математической модели и вычислительной схемы ее реализации

разработан и апробирован комплекс открытой архитектуры «DIRAK», включающий в себя:

- препроцессор;
- вычислительное ядро, выполняющее все этапы конечно-элементного анализа;
- постпроцессор.

Остановимся на каждой из частей комплекса (рис. 4). Препроцессор разрабатывается для любой отдельно взятой ситуации. При этом применяется рас-

пространственный в проектных организациях графический процессор AutoCAD. Для конструирования препроцессорных блоков служит библиотека функций на языках «С» и «AutoLISP». DWG-конвертор преобразует информацию чертежа AutoCAD во входную информацию вычислительного ядра. Препроцессор должен быть организован так, чтобы во время счета можно было менять информацию, что важно при решении задач оптимизации.

Подобная организация графического ввода позволяет свободно рассчитывать не только всю исследуемую область, но и ее части, что необходимо для проведения отладочных расчетов, исследования различных этапов работ и т. п. Конечно-элементное ядро состоит из библиотеки элементов, функций формирования матрицы жесткости системы конечных элементов, блока решения системы линейных уравнений и вычисления силовых факторов. Библиотека конечных элементов подбирается с ориентацией на тип конструкции. Архитектура постпроцессора функционирует в системе AutoCAD.

В качестве тестового примера был выбран расчет напряжений в основании сооружения при нагружении поверхности линейно-деформированного полупространства вертикальной равномерно распределенной полосовой нагрузкой в условиях плоской задачи.

Плоская задача определения напряжений для линейно-деформируемых тел детально разработана в трудах Л. Прандтля, Ж. Митчела, Г. В. Колосова, Н. П. Пузы-

ревского, Н. М. Герсегонова и др. Ограничимся только рассмотрением наиболее часто применяемых на практике решений. Как известно, используя формулы для напряжений в линейно-деформируемом массиве от погонной нагрузки (задача Фламана) в условиях плоской задачи путем интегрирования напряжений от действия элементарных сил, получают выражения для составляющих напряжений σ_z , σ_x , τ_{zx} при различных видах распределенных нагрузок. На рис. 5–8 приведены результаты расчета напряжений в основании сооружения от вертикальной равномерно распределенной полосовой нагрузки по программе «DIRAK». Полученные данные совпадают с общеизвестными решениями таких задач.

Программный комплекс «DIRAK» применялся для оценки воздействия транспортных нагрузок на существующий железнодорожный тоннель в г. Сочи, при эксплуатации автодорожного тоннеля. Расчетная схема и результаты расчетов показаны на рис. 9–12.

С помощью программного комплекса «DIRAK» можно определить и перемещения, напряжения в грунтовых массивах при динамических воздействиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курбацкий Е. Н., Мазур Г. Э. Численный метод решения задач теории упругости, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций // Вестник МИИТ. Вып. 1. — М., 1998.
2. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
3. Полещюк Н. Н. AutoCAD 2004: разработка приложений и адаптация. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
4. Цытович Н. А. Механика грунтов. — М.: Высшая школа, 1983.

NUMERICAL SIMULATION OF SOIL ENVIRONMENT

Golosova, Olga A. — senior lecturer of the department of underground structures of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT).

Nesterov, Ivan V. — Ph.D. (Tech), associate professor, head of the department of computer-aided design systems of transport constructions and structures of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT).

The authors have created the numerical realization of a variant of finite element method to detect shifts and tensions in the soil mass. The software is based on mathematical apparatus of Fourier transform of compact functions.

Key words: transport, deflected mode of a zone, rectangular element, Fourier image of compact functions, software package.

Координаты авторов (contact information): Голосова О. А. — olga-golosova@yandex.ru, Нестеров И. В. — acad_miit@mail.ru.

